

[練習30]

次の問いに答えよ。

→ 2乗して6になる数、だから2つある!

(1) 6 の平方根は何か。

(1) $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$ „ (± $\sqrt{6}$ と書いても可.)

→ 2乗して16になる数のうち、正の数、だから1つしかない。
(2) $\sqrt{16}, -\sqrt{\frac{9}{25}}$ の値を、それぞれ求めよ。

(2) $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$ „

→ 2乗して $\frac{9}{25}$ になる数のうち、負の数、

$$-\sqrt{\frac{9}{25}} = -\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5} „$$

※ 0の平方根は0のみ。

[練習31]

次の式を計算せよ。

かけ算を意味する。(2 $\sqrt{3}$ = 2× $\sqrt{3}$ と同じ意味)

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2}\sqrt{8}$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

(4) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$

※ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

※ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

※ $\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3}$

$$= \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$= \sqrt{6} „$$

• は×の意味。

(2) $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8}$

$$= \sqrt{2 \cdot 2^3}$$

$$= \sqrt{2^4}$$

$$= \sqrt{(2^2)^2}$$

$$= 2^2$$

$$= 4 „$$

(別解) $\sqrt{2}\sqrt{8}$

$$= \sqrt{2 \cdot 8}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= \sqrt{4^2}$$

$$= 4 „$$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}}$

$$= \sqrt{2} „$$

(別解) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{2} „$$

(4) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{24}{2}}$

$$= \sqrt{12}$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot 3}$$

$$= 2\sqrt{3} „$$

[練習32]

次の式を計算せよ。

(1) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$

(1) の式のイメ-ジは $5x - 2x + x$

これを計算すると $4x$ になり、

$4x^3$ や $4 \times 3x$ には
ならない!

一見異なって見えるが、全て $\sqrt{2}$ の形に変形できる!

※ 素因数分解の方法

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 32} \\ 2 \overline{) 16} \leftarrow 32 \div 2 \\ 2 \overline{) 8} \leftarrow 16 \div 2 \\ 2 \overline{) 4} \leftarrow 8 \div 2 \\ 2 \leftarrow 4 \div 2 \end{array}$$

よって、
 $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

したがって

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5}$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2}$$

$$= 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2}$$

同様に

$$\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2}$$

$$= 2 \cdot 3\sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 72} \\ 2 \overline{) 36} \\ 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

(1) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$$= (5 - 2 + 1)\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} „$$

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$

$$= \sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$$

$$= (1 + 4 - 6)\sqrt{2}$$

$$= -\sqrt{2} „$$

[練習33]

次の式を計算せよ。

(1) $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$

(2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

(3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(4) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

(1)のイメ-ジは $(4x+3y)(2x-y)$ の展開

(2)のイメ-ジは $(a-b)^2$ の展開

(1) $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$$= 8(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}\sqrt{5} + 6\sqrt{2}\sqrt{5} - 3(\sqrt{5})^2$$

$$= 16 - 4\sqrt{10} + 6\sqrt{10} - 15$$

$$= 1 + 2\sqrt{10} \text{ ,,}$$

(2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

$$= (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$= 12 - 4\sqrt{6} + 2$$

$$= 14 - 4\sqrt{6} \text{ ,,}$$

(3),(4)のイメ-ジは $(a+b)(a-b)$ の展開

(3) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$$= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= 3 - 2$$

$$= 1 \text{ ,,}$$

(4) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

$$= 3^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$= 9 - 5$$

$$= 4 \text{ ,,}$$

[練習34]

→ 無理数を有理数にすること。

次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(4) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

※もとの量を变えないように、分母と分子に同じ数をかける。

$$(1) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \\ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ,,}$$

$$(2) \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ = \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ = 2\sqrt{2} \text{ ,,}$$

$$(3) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ,,}$$

$$(4) \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} \\ = \frac{\sqrt{5}}{10} \text{ ,,}$$

無理数の分母だけかける!!

[練習35]

次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2}$

(4) $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

※ 無理数の和の形になっているとき、その中の $\sqrt{\quad}$ を一気に外す方法は1つしかない!!

$\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ の利用。

符号を変えた式を
かけることで、 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形ができて、 $\sqrt{\quad}$ が外れる。

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{2} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{5 - 3} \\ &= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2} \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2} &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} + 2)}{(\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2)} \\ &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{6} + 2)}{6 - 4} \\ &= \frac{\cancel{2}\sqrt{3}(\sqrt{6} + 2)}{\cancel{2}} \\ &= \sqrt{18} + 2\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \,, \end{aligned}$$

ミス多い!! $2^2 = 4$ だよ。

$$\begin{aligned} (4) \quad \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\cancel{2}(2 + \sqrt{3})}{\cancel{2}} \\ &= 2 + \sqrt{3} \,, \end{aligned}$$

よくある間違い!

$$\frac{\cancel{2}4 + 2\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 2 + 2\sqrt{3} \quad \times$$

$$\frac{4 + 2\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 4 + \sqrt{3} \quad \times$$

注意してくだい。

理解を深めるために (補足資料)

練30' $\sqrt{(-5)^2}$, $-\sqrt{(-5)^2}$, $(-\sqrt{5})^2$ の値をそれぞれ求めよ。

解) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$,,

$-\sqrt{(-5)^2} = -\sqrt{25} = -\sqrt{5^2} = -5$,,

$(-\sqrt{5})^2 = (-\sqrt{5})(-\sqrt{5}) = 5$,,

<ここからわかる大切なこと>

$a \geq 0$ のとき $\sqrt{a^2} = a$

$a < 0$ のとき $\sqrt{a^2} = -a$

すなわち $\sqrt{a^2} = |a|$

これをふまえて、
もういちどやってみます。

解) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$,,

$-\sqrt{(-5)^2} = -|-5| = -5$,,

$(-\sqrt{5})^2 = 5$,,

(注) この形は上の2つとは異なるので、 $|-5|$ にはなりません。

意味がわかるとこっちが楽ですね!

練34' $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ。

ありがちな

解) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{18}}{6}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{6}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$,,

最初から
分母と分子に
 $\sqrt{6}$ をかける。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 18} \\ 3 \overline{) 9} \\ \underline{3} \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array}$$

つまり

まず簡単にする。

少しラクな
解)

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$

$= \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$,,

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 6} \\ \underline{3} \\ 6 = 2 \cdot 3 \end{array}$$

つまり

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ に対して
分母分子に
 $\sqrt{2}$ をかける。

素因数分解で同じ無理数を先に約分できると
計算が楽になることが多い。