

気魄と情熱（仮称）

59回生のみなさん、こんにちは。昨日、健康調査のため各家庭へ電話連絡を行いました。皆さんの元気な声を聞くことができ、ほっとしています。心身ともに健康に過ごしていくためにも、規則正しい生活を送ってください。学校の授業日の時程に沿って活動することが理想的だと思います。それでは、今日も一日頑張りましょう！

1 復習のワンポイントアドバイス （別紙）

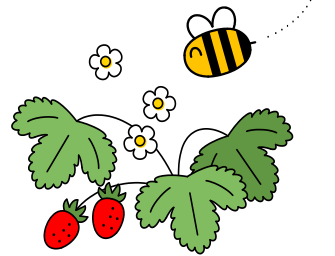
第2章 集合と命題

（1）命題と条件 …… 十分条件と必要条件の判定

（2）命題と証明 …… ① 逆・裏・対偶 ② 対偶証明法 ③ 背理法

2 🎵 ニュースで数学 🎵

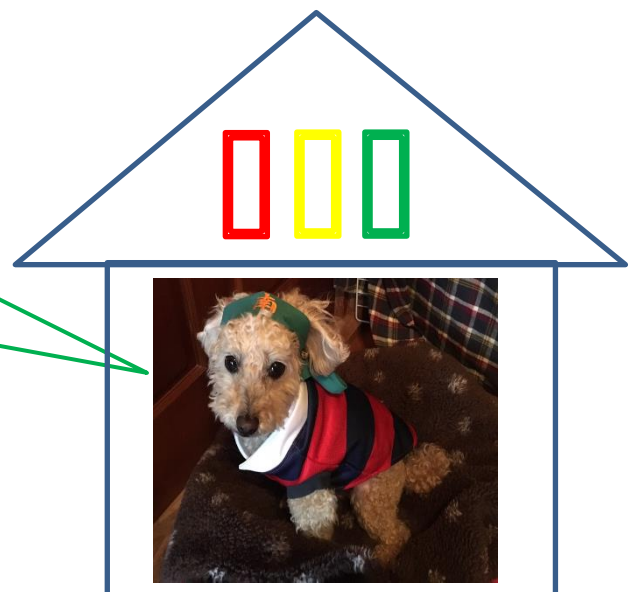
昨日夕方のニュースで、“スズメバチの巣にスズメの夫婦が住みついた話題”が取り上げられていました。空っぽになったスズメバチの巣の中に、自分たちの巣を作り、不要不急の外出を控え、夫婦仲良く寄り添っている映像は、心温まるものでした。また、テレビカメラが巣に寄った際の画面には、ハチの巣の断面が映し出され、何とも見事に、綺麗な正六角形の穴が敷き詰められていました。自然界には、美しい物が溢れているように感じます。と同時に、1つの疑問がわきました。なぜハチは正六角形の巣を作るのでしょうか？円形でも、正三角形・正方形・正五角形でもなく、正六角形を敷き詰めた巣を作るのは、どうしてでしょうか？



3 最後に

週末は不要不急の外出は控えましょう。
学習に専念できるチャンスです。
みんなで、

ステイホーム！！！！



☆ 復習のワンポイントアドバイス ☆

1 命題と条件（十分条件と必要条件の判定）

【命題と条件についての基本事項】

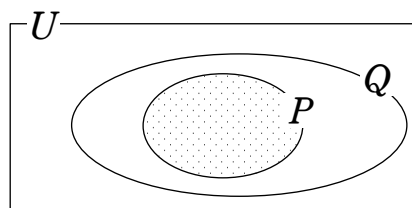
2つの条件 p, q について,

- (1) 命題 $p \implies q$ が与えられたとき,
 p を「**仮定**」, q を「**結論**」 という。
- (2) 命題 $p \implies q$ が **真** であるとき, 次のように定める。
- p は q であるための 「**十分条件**」 である。
- q は p であるための 「**必要条件**」 である。
- (3) (2) に加えて
命題 $q \implies p$ が **真** であるとき, 次のように定める。
- p は q であるための 「**必要十分条件**」 である。
- q は p であるための 「**必要十分条件**」 である。

次に、 全体集合を U とし, U の要素のうち,
条件 p を満たすものの全体の集合を P ,
条件 q を満たすものの全体の集合を Q
とします。

- (4) 命題 $p \implies q$ は
 P の要素はすべて Q の要素であることを表す。
- (5) $p \implies q$ が **真** ならば, $P \subset Q$ が成り立つ。
- (6) $P \subset Q$ が成り立てば, $p \implies q$ は **真** である。

※ (4)、(5) の
集合の包含関係については,
右図の通りです。



※ 現段階では、形式的に

” 十分条件 ” と ” 必要条件 ”

が判定できれば大丈夫です！

【十分と必要の判定チェック問題 10】

次の 内にあてはまるものを、①～④の中から選べ。

- ① 必要条件であるが、十分条件でない。
- ② 十分条件であるが、必要条件でない。
- ③ 必要十分条件である。
- ④ 必要条件でも十分条件でもない。

- (1) $x > 0$ は $x \neq 1$ であるための
- (2) $x = 2$ は、 $x^2 - 7x + 10 = 0$ であるための
- (3) $a + b = 0$ は、 $a = 0$ かつ $b = 0$ であるための
- (4) x, y は実数とする。 $x + y, xy$ がともに有理数であることは、 x, y がともに有理数であるための
- (5) $(m - 1)(n - 2) = 0$ は、 $m = 1$ または $n = 2$ であるための
- (6) 2 つの三角形の面積が等しいことは、2 つの三角形が合同であるための
- (7) $\angle A < 90^\circ$ は、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための
- (8) $a = b = c$ は $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ であるための ^ア
- (9) $a - b = 0$ であることは $|a - b| = |a + b|$ であるための ^イ
- (10) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、 $D > 0$ であることは、 $f(x) = 0$ が実数解をもつための

答：②②①①③①①③④②

2 命題と証明 (① 逆・裏・対偶 ② 対偶証明法)

【定義】

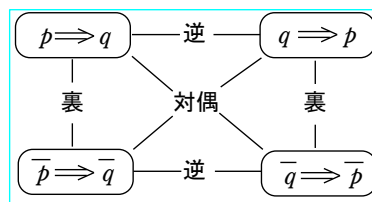
命題 $p \Rightarrow q$ に対して

$q \Rightarrow p$ を 逆

$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を 裏

$\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を 対偶

という。



(例) x を実数とすると、

命題「 $x=1 \Rightarrow x^2=1$ 」の逆、裏、対偶をとれ。

逆は $x^2=1 \Rightarrow x=1$

裏は $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$

対偶は $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

命題と逆、裏、対偶の関係については

- ① 命題とその対偶の真偽は一致する。
- ② 命題が真であっても、その逆、裏は真であるとは限らない。

※ 特に①は命題の証明によく用いられます。つまり、

命題の証明と対偶

命題 $p \Rightarrow q$ を証明するには、その
対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を証明してもよい。

次に挙げるのは、代表的な証明問題です。

(例題：対偶証明法の利用)

n は整数とする。対偶を考えて、次の命題を証明せよ。

「 n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。」

【証明】

この命題の対偶命題である。

n が奇数ならば、 n^2 は奇数である。…… (A)

奇数 n は、 $n=2k+1$ (k :整数) と表されるから

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k) + 1$$

ここで、 $2k^2+2k$ は整数であるから、 n^2 は奇数である。

よって、対偶命題 (A) は真であり、

もとの命題も真である。

□

※ 証明方法として、しっかりと定着させてください！

3 命題と証明 (③ 背理法)

もう一つ、この章で学習する証明方法を確認したいと思います。

【背理法】

ある命題について、その命題が成り立たないと仮定して、矛盾を導くことで、もとの命題が成り立つと結論づける証明法。

(手順)

ある命題を証明するのに、

- ① 命題が成り立たないと仮定する。
- ② 仮定した命題のもとで、矛盾を導く。
- ③ 矛盾が生じたことで、仮定した条件を否定する。
- ④ もとの命題が成立する。

具体的な例題は、数 I P62 で確認してください。

ここでは、背理法を用いた有名な問題を紹介します。教科書にも掲載しているので、ぜひ、頑張って学習してください！

【応用例題】

$\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ

〈ポイント〉

$\sqrt{2}$ は無理数でない、すなわち有理数であると仮定して矛盾を導く。

【証明】

※理解できた内容には、□にチェックを入れながら、読み進めてください。

□ $\sqrt{2}$ は無理数でない、すなわち有理数であると仮定すると、

□ 1 以外に正の公約数をもたない2つの自然数 a, b を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \text{と表される。}$$

□ このとき

$$a = \sqrt{2}b$$

両辺を2乗すると $a^2 = 2b^2 \dots\dots ①$

よって、 a^2 は偶数、したがって、 a も偶数である。

□ ゆえに、 a は、ある自然数 c を用いて

$$a = 2c \dots\dots ②$$

と表される。②を①に代入すると

$$4c^2 = 2b^2$$

すなわち $b^2 = 2c^2$

□ よって、 b^2 は偶数、したがって、 b も偶数である。

□ a と b はともに偶数であり、公約数2をもつ。このことは、 a と b が1以外に正の公約数をもたないことに矛盾する。

□ したがって、 $\sqrt{2}$ は無理数である。

☐

これは、程度の高い証明問題になります。時間をかけながら理解に努めてください。