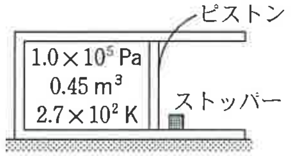
㊔P.104 [例題1]

ボイル·シャルルの法則

なめらかに動くピストン付きの容器に気体を閉じこめ，図のように水平な床の上に置く。このときの気体の圧力は 1.0×10^5 Pa，体積は 0.45 m^3，温度は 2.7×10^2 K であった。

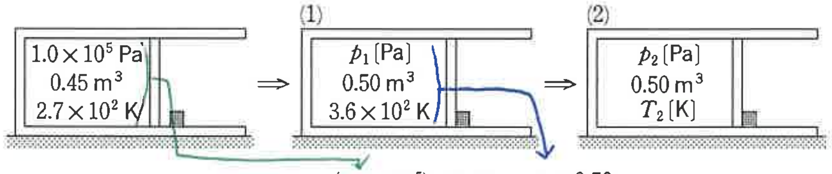


この容器を温めたところピストンは右に移動し，ストッパーで止められた状態になった。このときの気体の体積は 0.50 m^3，温度は 3.6×10^2 K であった。

(1) 温めた後の気体の圧力 p_1[Pa] を求めよ。

(2) その後，気体を放置したところ，ピストンは左に動き始めた。このときの気体の圧力 p_2[Pa] と温度 T_2[K] を求めよ。

解説



(1) ボイル·シャルルの法則より $\dfrac{(1.0\times10^5)\times0.45}{2.7\times10^2}=\dfrac{p_1\times0.50}{3.6\times10^2}$

よって　$p_1=\dfrac{(1.0\times10^5)\times0.45}{2.7\times10^2}\times\dfrac{3.6\times10^2}{0.50}=1.2\times10^5$ Pa

(2) 気体の圧力がもとの値にもどったとき，ピストンは動き始める。※

よって　$p_2=1.0\times10^5$ Pa

ボイル·シャルルの法則より

$$\frac{(1.2\times10^5)\times0.50}{3.6\times10^2}=\frac{(1.0\times10^5)\times0.50}{T_2}$$

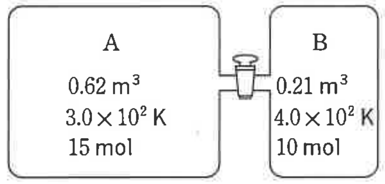
よって　$T_2=(1.0\times10^5)\times\dfrac{3.6\times10^2}{1.2\times10^5}=3.0\times10^2$ K

※ 初め容器内にあった気体の圧力が 1.0×10^5 Paで
ピストンは止まっていた。このとき，容器内の気圧と
大気圧は等しいことになるので，大気圧の大きさは
1.0×10^5 Paである。
(1)のとき，容器内の気圧は 1.2×10^5 Paで大気圧より大きい。
このときは，ストッパーがピストンを押さえている。
気体を放置し，熱が放出され容器内の圧力が小さく
なっていき，大気圧の大きさと等しくなったとき，
ピストンはストッパーから離れ，動き始める。

㊔P.112 [例題2]

理想気体の内部エネルギー

それぞれ 0.62 m^3，0.21 m^3 の容積をもつ容器 A，B をコックのついた細管でつなぎ，A には温度が 3.0×10^2 K，物質量が 15 mol，B には温度が 4.0×10^2 K，物質量が 10 mol の単原子分子理想気体を入れる。コックを開いて全体の状態が一様になったときの温度 T[K] と圧力 p[Pa] を求めよ。ただし，容器と周囲との熱のやりとりはなく，気体の内部エネルギーの合計は一定に保たれるとする。また，細管の体積は無視する。気体定数を 8.3 J/(mol·K) とする。



解説

Aの内部エネルギー + Bの内部エネルギー = 混合後の内部エネルギー

内部エネルギー「$U=\dfrac{3}{2}nRT$」の合計が一定であるから

$$\underbrace{\frac{3}{2}\times15\times8.3\times(3.0\times10^2)}_{A}+\underbrace{\frac{3}{2}\times10\times8.3\times(4.0\times10^2)}_{B}=\underbrace{\frac{3}{2}\times(15+10)\times8.3\times T}_{混}$$

よって　$T=\dfrac{15\times(3.0\times10^2)+10\times(4.0\times10^2)}{15+10}=3.4\times10^2$ K

混合後の気体の状態方程式「$pV=nRT$」は

$p\times(0.62+0.21)=(15+10)\times8.3\times(3.4\times10^2)$

よって　$p=\dfrac{(15+10)\times8.3\times(3.4\times10^2)}{0.62+0.21}=8.5\times10^4$ Pa

※類題2において，Bは真空(気体が存在しない)
なので，内部エネルギーは0

㊔P.117 [例題3]

定積変化·定圧変化

なめらかに動くピストンがついた容器に n[mol] の単原子分子理想気体を閉じこめたところ，温度が T_0[K] になった。この気体に対し次の操作をしたときの，気体の内部エネルギーの変化 ΔU[J]，気体がされた仕事 W[J]，気体が受け取った熱量 Q[J] をそれぞれ求めよ。気体定数を R[J/(mol·K)] とする。

(1) 体積を一定に保ったまま，温度を T_1[K] にした。

(2) 圧力を一定に保ったまま，温度を T_1[K] にした。

解説

(1) 定積変化であるので，気体と外部の間に仕事のやりとりはない。

$W=0$ J

単原子分子理想気体であるから，「$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$」より　$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR(T_1-T_0)$[J]

熱力学第一法則「$\Delta U=Q+W$」より

$Q=\Delta U-W=\dfrac{3}{2}nR(T_1-T_0)$[J]

(2) 気体の圧力を p_0[Pa]，変化前後での気体の体積をそれぞれ V_0，V_1[m^3] とすると，

理想気体の状態方程式「$pV=nRT$」より

※1
変化前：$p_0V_0=nRT_0$　……①
変化後：$p_0V_1=nRT_1$　……②

「$W=-p\Delta V$」より

$W=-p_0(V_1-V_0)$

これに①，②式を代入して　※2

$W=-nR(T_1-T_0)$[J]

温度変化は(1)と同じなので，ΔU も等しい。

$\Delta U=\dfrac{3}{2}nR(T_1-T_0)$[J]

熱力学第一法則「$\Delta U=Q+W$」より

$Q=\Delta U-W=\dfrac{3}{2}nR(T_1-T_0)-\{-nR(T_1-T_0)\}=\dfrac{5}{2}nR(T_1-T_0)$[J]

※1 この問題の場合，圧力pや体積Vについて問題文で
触れられていないため，解答に用いることはできない。
このようなときは状態方程式「$pV=nRT$」を用いて，
※2のように文字を変換する必要がある。

表題 ( )組( )番 名前( )

Ⓚ P.123 [例題4]

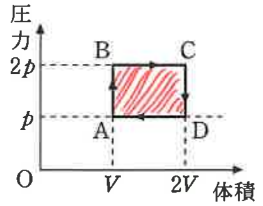
気体の状態変化・熱効率

単原子分子理想気体 n [mol] に対して，図の 4 つの過程をくり返して状態を変化させた。状態 A の気体の温度を T_A [K]，気体定数を R [J/(mol·K)] として，次の各量を n，R，T_A を用いて表せ。

(1) 状態 B，C，D の温度 T_B，T_C，T_D [K]

(2) A → B → C → D → A の変化で，気体が吸収する熱量 Q_{in} [J] と，放出する熱量 Q_{out} [J]

(3) このサイクルを熱機関とみなしたときの熱効率 e（分数で答えてよい）



解説

(1) ボイル・シャルルの法則より，温度は，定積変化では圧力に比例し，定圧変化では体積に比例する。

$T_B = 2T_A$ [K]

$T_C = 2T_B = 4T_A$ [K]

$T_D = \frac{1}{2}T_C = 2T_A$ [K]

→ボイル・シャルルの法則を適用し，地道に計算しても良い。

(A) $\frac{pV}{T_A} = $ (B) $\frac{2pV}{T_B}$　$T_B = \underline{2T_A[K]}$

(B) $\frac{2pV}{2T_A} = $ (C) $\frac{2p\cdot 2V}{T_C}$　$T_C = \underline{4T_A[K]}$

(C) $\frac{2p\cdot 2V}{4T_A} = \frac{p\cdot 2V}{T_D}$　$T_D = \underline{2T_A[K]}$

(2) 各過程で気体が得る熱量を $Q_{A \to B}$ [J] のように表す。

A → B，C → D は定積変化であるから，定積モル比熱「$C_V = \frac{3}{2}R$」を用いて

$$Q_{A\to B} = \frac{3}{2}nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2}nRT_A$$

$$Q_{C\to D} = \frac{3}{2}nR(T_D - T_C) = -3nRT_A$$

→モル比熱を用いた式「$Q = nC\Delta T$」を適用している。

ΔT は温度変化である。なので，変化後－変化前である。

つまり，

$Q_{A\to B} = n \cdot C_V \cdot (T_B - T_A)$

$C_V = \frac{3}{2}R$ なので，

$= n \cdot \frac{3}{2}R \cdot (T_B - T_A)$

(1) より，$T_B = 2T_A$ なので，

$= n \cdot \frac{3}{2}R \cdot (2T_A - T_A)$

$= \frac{3}{2}nRT_A$

である。

B → C，D → A は定圧変化であるから，定圧モル比熱「$C_p = \frac{5}{2}R$」を用いて

$$Q_{B\to C} = \frac{5}{2}nR(T_C - T_B) = 5nRT_A$$

$$Q_{D\to A} = \frac{5}{2}nR(T_A - T_D) = -\frac{5}{2}nRT_A$$

以上より　$Q_{in} = Q_{A\to B} + Q_{B\to C} = \frac{13}{2}nRT_A$ [J]

$Q_{out} = -(Q_{C\to D} + Q_{D\to A}) = \frac{11}{2}nRT_A$ [J]

$Q>0$ は熱を吸収した
$Q<0$ は熱を放出した
と考えている。

(3) 「$e = \frac{Q_{in} - Q_{out}}{Q_{in}}$」より　$e = \frac{\frac{13}{2} - \frac{11}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{2}{13}$

〈別解〉

図の A→B→C→D→A の 1 サイクルに囲まれた面積は，（■の部分）

熱機関が 1 サイクルでした仕事に等しい。

$W' = (2p - p) \times (2V - V) = pV$

ここで，$pV = nRT_A$ なので，$W' = nRT_A$ [J]

$e = \frac{W'}{Q_{in}} = \frac{nRT_A}{\frac{13}{2}nRT_A} = \frac{2}{13}$