問題6

a が次の値をとるとき，$|a-3|-|a+2|$ の値を求めよ。

(1)　$a=0$　　(2)　$a=5$　　(3)　$a=-4$

(1)　$|0-3|-|0+2| = |-3|-|2| = 3-2 = 1$ //

(2)　$|5-3|-|5+2| = |2|-|7| = 2-7 = -5$ //

(3)　$|-4-3|-|-4+2| = |-7|-|-2| = 7-2 = 5$ //

問題7

x が次の値をとるとき，$\sqrt{(x+1)^2}$ の値を求めよ。

(1)　$x=3$　　(2)　$x=-1$　　(3)　$x=-3$

(1)　$\sqrt{(3+1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$ //

(2)　$\sqrt{(-1+1)^2} = \sqrt{0} = 0$ //

(3)　$\sqrt{(-3+1)^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ //

(別解)　$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$

(1) $x=3$ のとき，$|x+1| = |4| = 4$ //

(2) $x=-1$ のとき，$|x+1| = |0| = 0$ //

(3) $x=-3$ のとき，$|x+1| = |-2| = 2$ //

$\boxed{\sqrt{x^2} = |x| \ (\text{P.27}) \cdots \text{覚えよう}}$

問題8

次の (1)，(2) の式を計算せよ。また，(3)～(6) の式の分母を有理化せよ。

(1)　$2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}$　　(2)　$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

(3)　$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$　　(4)　$\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(5)　$\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$　　(6)　$\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$

(1)　$2\sqrt{27}-3\sqrt{12}+\sqrt{54}$

$= 2\times3\sqrt{3} - 3\times2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$

$= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$

$= 3\sqrt{6}$ //

(2)　$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$

$= (\sqrt{3})^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$

$= 3 + 2\sqrt{18} + 6$

$= 9 + 2\times3\sqrt{2} = 9 + 6\sqrt{2}$ //

(3)
$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
//

(4)
$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=6+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+2=8+3\sqrt{6}$$
//

(5)
$$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\times(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})\times(1+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-3}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$
//

(6)
$$\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$$
√3倍に気づければ

$$=\frac{\sqrt{3}\cancel{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{6}\cancel{(1+\sqrt{3})}}$$
この方法が一番速い

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
//

(6)〈別解〉
$$\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{18}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(3+\sqrt{3})(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+3\sqrt{2})(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3\sqrt{6}-9\sqrt{2}+\sqrt{18}-3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{-9\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6-18}$$
$$=\frac{-6\sqrt{2}}{-12}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
//

問題9

$\sqrt{2}=1.4142$ とするとき，分母の有理化を利用して，次の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1.4142}{2} = 0.7071$ //

(2) $(与式) = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2} = 2+\sqrt{2}$

$= 2+1.4142$

$= 3.4142$ //

比べてみよう　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の値

そのままだと…

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 1 \div 1.4142 = \cdots$　面倒！　$1.4142 \overline{)\ 1}$?

分母の有理化をすると…

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1.4142}{2} = 0.7071$ … かんたん！

問題12

次の不等式を解け。

(1) $36-x<2(12+x)$

(2) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{10-x}{2}\geqq 4$

(3) $\begin{cases}2x+6>5x-12\\3x-7\leqq 2(4-x)\end{cases}$

(4) $0.05\leqq 0.2-\dfrac{x}{100}\leqq 0.1$

(1) $36-x<24+2x$

$-x-2x<24-36$

$-3x<-12$

$\dfrac{-3x}{-3}>\dfrac{-12}{-3}$

$x>4$ //

(2) $6\times\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{10-x}{2}\right)\geqq 6\times 4$

$2x+3(10-x)\geqq 24$

$2x-3x\geqq 24-30$

$-x\geqq -6$

$\dfrac{-x}{-1}\leqq\dfrac{-6}{-1}$

$x\leqq 6$ //

(3) $\begin{cases}2x+6>5x-12 & —① \\ 3x-7\leqq 2(4-x) & —②\end{cases}$

①より $2x-5x>-12-6$

$-3x>-18$

$x<6$ —①'

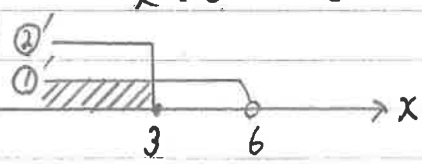
②より $3x-7\leqq 8-2x$

$3x+2x\leqq 8+7$

$5x\leqq 15$

$x\leqq 3$ —②'

①', ②'より



よって、 $x\leqq 3$ //

(4) 各辺に100を掛けると

$100\times 0.05\leqq 100\times\left(0.2-\dfrac{x}{100}\right)\leqq 100\times 0.1$

$5\leqq 20-x\leqq 10$

各辺から20を引くと

$-15\leqq -x\leqq -10$

各辺に-1を掛けると

(=各辺を-1で割ると)

$15\geqq x\geqq 10$

よって

$10\leqq x\leqq 15$ //

左辺、右辺にXを含まないときはこのような計算が速い

$\begin{cases}5\leqq 20-x & —① \\ 20-x\leqq 10 & —②\end{cases}$

①より

$x\leqq 20-5$

$x\leqq 15$ —①'

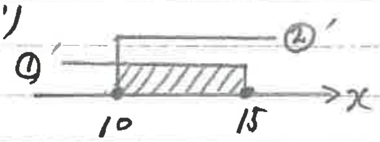
②より

$-x\leqq 10-20$

$-x\leqq -10$

$x\geqq 10$ —②'

①', ②'より



よって、

$10\leqq x\leqq 15$ //

問題13

x についての不等式 $x+a \geqq 3x+5$ の解が $\boxed{x \leqq 3}$ のとき，定数 a の値を求めよ。

$$x-3x \geqq -a+5$$
$$-2x \geqq -a+5$$
$$\frac{-2x}{-2} \leqq \frac{-a+5}{-2}$$
$$\boxed{x \leqq \frac{a-5}{2}}$$

扱いやすい形に

$$\frac{-a+5}{-2} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{a-5}{2} \qquad \frac{-1}{-2} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{1}{2}$$

$\frac{a-5}{2} = 3$ より $a-5=6$ よって $a=11$ //

問題14

和が 40 である異なる 2 つの数がある。大きい数を $\frac{1}{4}$ 倍すると小さい数よりも小さくなるという。大きい数のとりうる値の範囲を求めよ。

大きい数を x とすると

和が40だから，小さい数は $40-x$ と表され，$40-x < x$ —① 見落としに注意

大きい数を $\frac{1}{4}$ 倍すると小さい数よりも小さくなるから

$$\frac{1}{4}x < 40-x \quad —②$$

(注) 大きい数，小さい数はそう呼んでいるだけであり，x が $40-x$ より必ず大きくなるわけではない。例えば $x=10$ のとき $40-x=30$ となり $40-x$ の方が大きくなる

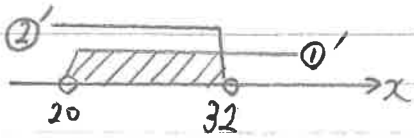
①より

$$-x-x < -40$$
$$-2x < -40$$
$$x > 20 \quad —①'$$

②より

$$4 \times \frac{1}{4}x < 4 \times (40-x)$$
$$x < 160-4x$$
$$x+4x < 160$$
$$5x < 160$$
$$\frac{5x}{5} < \frac{160}{5}$$
$$x < 32 \quad —②'$$

①'，②'より



よって $20 < x < 32$

大きい数は20より大きく32より小さい //

ルートの値について

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は**無理数**と呼ばれる数で循環しない無限小数になります。

$\sqrt{2}=1.41421356\cdot\cdot\cdot$ 、$\sqrt{3}=1.7320508\cdot\cdot\cdot$ 、$\sqrt{5}=2.2360679\cdot\cdot\cdot$

（語呂合わせで $\sqrt{2}$ は「一夜（ひとよ）一夜に人見頃」、$\sqrt{3}$ は「人並みにおごれや」、$\sqrt{5}$ は「富士山麓オウム鳴く」と覚えます）

無限小数なので数のおわりがありません。試しに電卓で1.41421356×1.41421356と計算してみてください。結果は1.9999998（8桁の電卓の場合）となり、2になることはありません。

終わりのない数なので、無理数の値はおよその値（近似値）を使います。

$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4$ 、$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$ 、$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.2$ （「≒～」は「およそ～に等しい」という意味）は覚えましょう。

次のような問題があります。

$\sqrt{3}$ の整数部分を a とすると、$a=\boxed{}$ である。

$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$ を知っていれば $a=1$ と答えられます。

では、次の問題はどうでしょうか。

$\sqrt{7}$ の整数部分を a とすると、$a=\boxed{}$ である。

$\sqrt{7}$ の近似値が必要になります。次のようにします。まず $\sqrt{7}$ を2乗します。$(\sqrt{7})^2=7$ です。

この７を1,4,9,16,25,…**のうちの連続する2つの数ではさみます。**ちなみにこれらの数は1,2,3,4,5,…を2乗してできる数です。

4と9が7をはさみます。このことから、

$$4<7<9 \Longrightarrow \sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9} \Longrightarrow 2<\sqrt{7}<3$$

となり、「$\sqrt{7}$ は 2 (2.0000…)より大きく 3 (3.0000…) より小さい」と分かったので、

$$\sqrt{7}\fallingdotseq 2.\cdot\cdot\cdot \quad \text{（小数点以下は不明）}$$

という $\sqrt{7}$ の姿がわかります。したがって、上の問題の答は $a=2$ です。

最後に次の問題はどうでしょうか。

$2\sqrt{7}+1$ の整数部分を a とすると、$a=\boxed{}$ である。

$(2\sqrt{7})^2=4\times7=28$ です。25と36が28をはさみます。

$$25<28<36 \Longrightarrow \sqrt{25}<\sqrt{28}<\sqrt{36} \Longrightarrow 5<2\sqrt{7}<6 \Longrightarrow 5+1<2\sqrt{7}+1<6+1 \Longrightarrow 6<2\sqrt{7}+1<7$$

これから　$2\sqrt{7}+1\fallingdotseq 6.\cdot\cdot\cdot$

と分かるので、上の問題の答は $a=6$ です。

この問題を $\sqrt{7}\fallingdotseq 2$ として計算すると $2\sqrt{7}+1\fallingdotseq 2\times2+1=5$ となり間違ってしまいます。

これは $\sqrt{7}\fallingdotseq 2$ という近似値を2倍した時点で誤差が大きくなってしまったためです。