

気魄と情熱 (仮称)



令和2年5月8日(金)
長崎県立長崎南高等学校
文責 第2学年数学科

59回生のみなさん、こんにちは。5月11日(月)から、分散登校ではありますが、授業が再開されます。いろいろな制限がある中での再開ですが、与えられた条件の中で、できることを最大限に取り組んで欲しいと思います。また、状況に応じて急な変更等もありますが、臨機応変に対応していきましょう！

1 5月7日(木)～10日(日)の家庭学習について(別紙)

数Ⅱ 第1章 式と証明
第2節 等式・不等式の証明

上記の範囲について、練習問題の解答を掲載します。各自で確認してください。また、課題一覧表で連絡した確認テストについては、休業明けの最初の授業では実施しません。分散登校のため、全クラスの授業が確保できないからです。急な変更ですみませんが、宜しくお願いします。また、数Ⅱの授業は、教科書P.36から開始します。詳しくは授業の中で連絡します。

2 🎵 ニュースで数学 🎵

連休中のある日のニュースで、心温まる夫婦の話題が取り上げられていました。毎日、外出自粛が続くため、旦那さんが奥さんに料理を作ろうと思い、エプロンを買ってもらったそうです。旦那さんは、早速取りかろうとエプロンを身につけたところ、エプロンに次の等式が刺繍されていました。旦那さんが喜ぶようにと奥さんが刺繍したようです。不思議に思った旦那さんは、高校時代に習った数Ⅲの内容を思いだしながら、グラフを描きました。旦那さんは、グラフが完成した瞬間、うれしい気持ちになって、喜んで料理に取り組んだそうです！

$$x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$$

今回、このグラフの形は明かしません。夫婦の思いやりある行動と心遣いに、心温まる話題として取り上げられていました。この数式を刺繍で贈った奥さんも、この数式が表すグラフを自力で書いた旦那さんも素敵なあと感じるとともに、夫婦の教養の高さに驚きました！私も思いやりをもった行動を日頃から心掛けたいと思います。

☆ 解答編 ☆

【数ⅡP.24 練習23】

<解答>

$$(1) \text{ 右辺} = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (3a^2b - 3ab^2) = a^3 - b^3 = \text{左辺}$$

$$\text{よって } a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$(2) \text{ 右辺} = \left(a^2 + ab + \frac{b^2}{4}\right) + \frac{3}{4}b^2 = a^2 + ab + b^2 = \text{左辺}$$

$$\text{よって } a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$$(3) \text{ 左辺} = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$\text{右辺} = 1 + x + x + x^2 + x(1 + 2x + x^2)$$

$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

左辺と右辺が同じ式になるから

$$(1 + x)^3 = 1 + x + x(1 + x) + x(1 + x)^2$$

【数ⅡP.24 練習24】

<解答>

$$a + b + c = 0 \text{ より, } c = -(a + b) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} a^2 + ca - (b^2 + bc) &= a^2 - (a + b)a - b^2 + b(a + b) \\ &= a^2 - a^2 - ab - b^2 + ab + b^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a^2 + ca = b^2 + bc$$

【数ⅡP.24 練習25】

<解答>

$$a + b = -c, \quad b + c = -a, \quad c + a = -b \text{ であるから}$$

$$\text{左辺} = ab(-c) + bc(-a) + ca(-b) + 3abc$$

$$= -abc - abc - abc + 3abc$$

$$= 0$$

$$\text{よって } ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc = 0$$

【数ⅡP.25 練習26】

<解答>

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと } a = bk, \quad c = dk$$

$$(1) \quad \frac{a + c}{b + d} = \frac{bk + dk}{b + d} = \frac{k(b + d)}{b + d} = k$$

$$\frac{2a - 3c}{2b - 3d} = \frac{2bk - 3dk}{2b - 3d} = \frac{k(2b - 3d)}{2b - 3d} = k$$

$$\text{よって } \frac{a + c}{b + d} = \frac{2a - 3c}{2b - 3d}$$

$$(2) \quad \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{b^2k^2 + d^2k^2}{b^2 + d^2} = \frac{k^2(b^2 + d^2)}{b^2 + d^2} = k^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2k^2}{b^2} = k^2$$

$$\text{よって } \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

【数Ⅱ P.27 練習27】

$$(3x-4y)-(x-2y)=2x-2y=2(x-y)$$

$$x>y \text{ であるから } x-y>0$$

$$\text{よって } (3x-4y)-(x-2y)>0$$

$$\text{したがって } 3x-4y>x-2y$$

【数Ⅱ P.27 練習28】

$$x>2, y>3 \text{ より}$$

$$x-2>0, y-3>0$$

$$\text{であるから } (x-2)(y-3)>0$$

$$\text{よって } (xy+6)-(3x+2y)>0$$

$$\text{したがって } xy+6>3x+2y$$

【数Ⅱ P.28 練習29】

$$(1) \quad (x^2+9y^2)-6xy=x^2-6xy+9y^2 \\ = (x-3y)^2 \geq 0$$

$$\text{よって } x^2+9y^2 \geq 6xy$$

等号が成り立つのは、 $x-3y=0$ すなわち $x=3y$ のときである。

$$(2) \quad (a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab \\ = a^2-2ab+b^2 \\ = (a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{よって } (a+b)^2 \geq 4ab$$

等号が成り立つのは、 $a-b=0$ すなわち $a=b$ のときである。

$$(3) \quad (2x^2+9y^2)-6xy=x^2+x^2-6xy+9y^2 \\ = x^2+(x-3y)^2 \geq 0$$

$$\text{よって } 2x^2+9y^2 \geq 6xy$$

等号が成り立つのは、 $x=0$ かつ $x-3y=0$ 、すなわち $x=y=0$ のときである。

$$(4) \quad a^2-ab+b^2=a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3}{4}b^2 \\ = \left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

$$\text{よって } a^2-ab+b^2 \geq 0$$

等号が成り立つのは、 $a-\frac{b}{2}=0$ かつ $b=0$ 、すなわち $a=b=0$ のときである。

【数Ⅱ P.29 練習30】

両辺の平方の差を考えると

$$(1+x)^2-(\sqrt{1+2x})^2=(1+2x+x^2)-(1+2x) \\ = x^2 > 0$$

$$\text{よって } (1+x)^2 > (\sqrt{1+2x})^2$$

$$1+x>0, \sqrt{1+2x}>0 \text{ であるから}$$

$$1+x>\sqrt{1+2x}$$

【数Ⅱ P.30 練習31】

両辺の平方の差を考えると

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)^2 - |a-b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a-b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| + ab) \geq 0 \end{aligned}$$

よって $(|a|+|b|)^2 \geq |a-b|^2$

$|a|+|b| \geq 0$, $|a-b| \geq 0$ であるから

$$|a|+|b| \geq |a-b|$$

等号が成り立つのは, $|ab| = -ab$ すなわち $ab \leq 0$ のときである

【数Ⅱ P.31 練習32】

- (1) $a > 0$, $\frac{4}{a} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$$

よって $a + \frac{4}{a} \geq 4$

等号が成り立つのは, $a > 0$ かつ $a = \frac{4}{a}$, すなわち $a = 2$ のときである。

- (2) $\frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

よって $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

等号が成り立つのは, $a > 0$, $b > 0$ かつ $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, すなわち $a = b$ のときである。